

Modélisation et régulation d'un pendule inversé

Freddy Mudry

L'institut d'Automatisation industrielle (iAi) de l'eivd a étudié et réalisé un pendule inversé pour les besoins du laboratoire de régulation automatique. Le document qui suit présente l'analyse, la synthèse et les résultats obtenus en simulation et expérimentalement.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Équations du système	2
2.1	Équations du balancier	2
2.2	Linéarisation des équations	2
2.3	Équations du système d'entraînement	3
2.4	Équations linéaires de l'ensemble	5
3	Représentation d'état de l'ensemble	6
3.1	Valeurs numériques des paramètres	6
4	Régulateur d'état	6
4.1	Critères d'optimisation pour le régulateur	7
4.2	Gains du régulateur	8
4.3	Comportement temporel en boucle fermée	8
4.4	Régulateurs Proportionnel-Dérivé	9
4.5	Schéma fonctionnel	9
5	Simulation et résultats expérimentaux	9
6	Remerciements	11
7	Annexes	12
7.1	Équations du pendule inversé	12
7.1.1	Équations du balancier	12
7.1.2	Équation du chariot	12
7.1.3	Équations de liaisons	13
7.1.4	Calcul des accélérations	13
7.2	Programme de simulation et synthèse du régulateur d'état	14
7.3	Forme canonique des équations non linéaires	17

Modélisation et régulation d'un pendule inversé

1 Introduction

Dans le domaine scientifique et celui de l'enseignement, l'automatique a souvent recours à des cas d'études particuliers, qui sont représentatifs de grandes classes d'applications, et dont le caractère spectaculaire est confirmé. De plus, avec l'expérience, la connaissance de ces cas s'est affinée et ils fournissent aujourd'hui une base idéale pour comparer de façon valable les avantages et les inconvénients d'approches différentes. Le pendule inversé est un de ces cas-types.

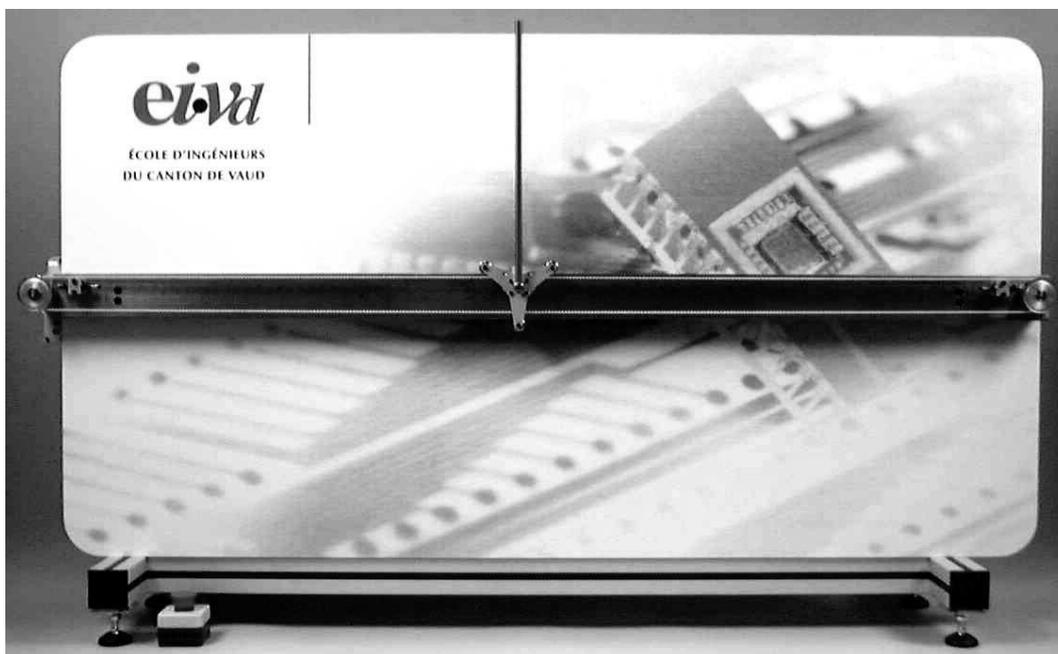


FIG. 1: Vue d'ensemble du pendule inversé de l'eivd

Depuis plusieurs années, le laboratoire d'automatique de l'eivd développe des expériences à vocation didactique sur le thème de la régulation : bille se déplaçant sur une règle inclinable, réglage de l'altitude d'une sphère par un flux d'air variable, sustentation magnétique, pendule inversé.

Dans le cas de ce dernier, c'est une version médiane en terme de complexité qui est présentée ici : le pendule tourne librement autour d'un axe horizontal solidaire d'un chariot se déplaçant sur un rail. La longueur du pendule est de 40 cm et celle du rail de 153 cm.

La solution adoptée passe par une régulation en temps réel sous Windows NT. L'algorithme implémente un système de régulation multivariables, dimensionné selon la théorie des modèles d'état.

2 Équations du système

2.1 Équations du balancier

Les variables et paramètres utilisés sont présentés dans le tableau 1 et illustrés par la figure 2.

Partant des lois de la dynamique, on montre aisément (voir section 7.1) que l'ensemble chariot-balancier est régi par les équations suivantes :

$$\ddot{\varphi}(t) = \frac{3g}{2L_b} \sin(\varphi(t)) - \frac{f_b}{4J_b} \dot{\varphi}(t) + \frac{3}{2L_b} \ddot{x}(t) \cos(\varphi(t)) \quad (1)$$

$$\ddot{x}(t) = \frac{F(t)}{m_{cc} + m_b} - \frac{f_{cc}}{m_{cc} + m_b} \dot{x}(t) + \frac{m_b L_b / 2}{m_{cc} + m_b} \left(\ddot{\varphi}(t) \cos(\varphi(t)) - \dot{\varphi}^2(t) \sin(\varphi(t)) \right) \quad (2)$$

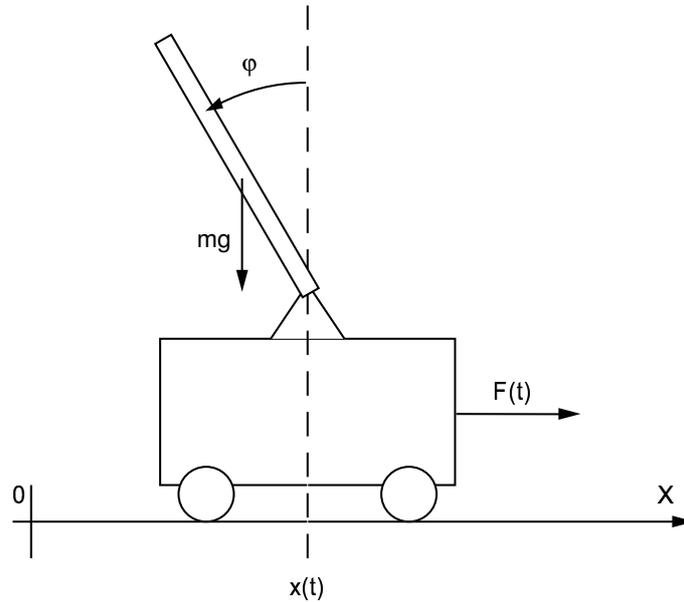


FIG. 2: Pendule inversé

2.2 Linéarisation des équations

Considérant que l'angle $\varphi(t)$ reste petit par rapport à 1 radian et que les termes non-linéaires peuvent être négligés, on obtient le modèle linéaire suivant :

$$\ddot{\varphi}(t) = \frac{3g}{2L_b} \varphi(t) - \frac{f_b}{4J_b} \dot{\varphi}(t) + \frac{3}{2L_b} \ddot{x}(t) \quad (3)$$

$$\ddot{x}(t) = -\frac{f_{cc}}{m_{cc} + m_b} \dot{x}(t) + \frac{m_b L_b / 2}{m_{cc} + m_b} \ddot{\varphi}(t) + \frac{1}{m_{cc} + m_b} F(t) \quad (4)$$

Paramètres	Unités	Description
L_b	m	longueur du balancier
m_b	kg	masse du balancier
m_{ch}	kg	masse du chariot
m_{cr}	kg	masse de la courroie
m_{cc}	kg	masse du chariot et de la courroie
J_b	$kg \cdot m^2$	inertie du balancier par rapport à son c.d.g.
f_b	$N \cdot m / (rad/sec)$	frottement du balancier
f_{cc}	$N / (m/sec)$	frottement du chariot-courroie
$\varphi(t)$	rad	position angulaire du balancier
$x(t)$	m	position longitudinale du chariot
$F(t)$	N	force appliquée au chariot

TAB. 1: Variables et paramètres du pendule inversé

2.3 Équations du système d'entraînement

Le système d'entraînement comprend un moteur à courant continu, son amplificateur, deux poulies (P_1, P_2) formant le réducteur et deux poulies de renvoi de la courroie (P_3, P_4).

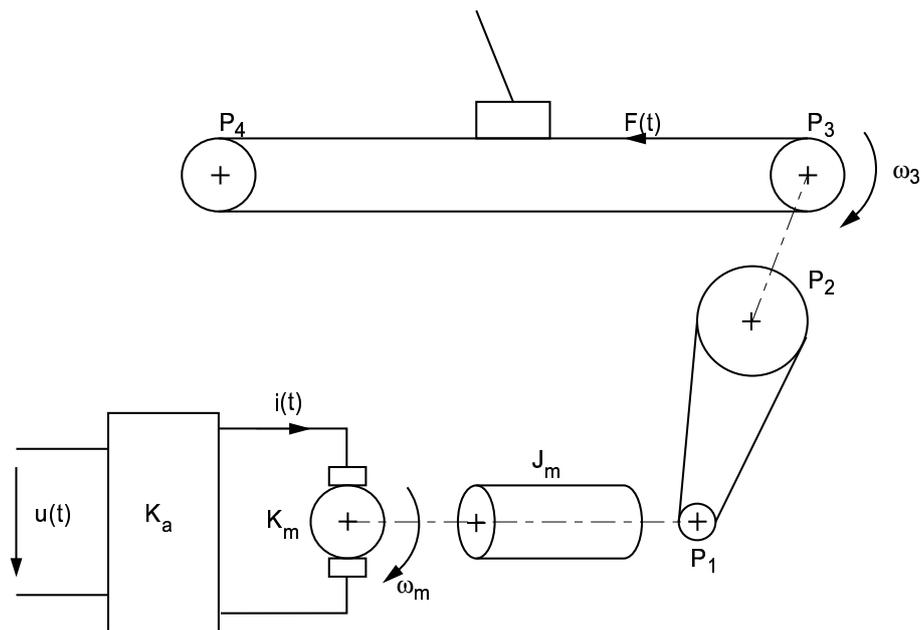


FIG. 3: Système d'entraînement

Les variables et paramètres utilisés par la suite sont présentés dans le tableau 2 et illustrés par la figure 3. Une photographie du système d'entraînement est donnée à la figure 4.

L'équation du mouvement de rotation du moteur s'écrit :

$$J_0 \dot{\omega}_m(t) = \sum C_k(t) = K_a K_m u(t) - \frac{r_3}{N} F(t) \quad (5)$$

avec



FIG. 4: Vue détaillée de l'entraînement : moteur, réducteur à courroie et chariot

Paramètres	Unités	Description
ω_m	rad/sec	vitesse de rotation du moteur
ω_k	rad/sec	vitesse de rotation des poulies P_k
r_k	m	rayon des poulies P_k
K_a	A/V	gain de l'amplificateur
K_m	$N \cdot m/A$	constante de couple
N	-	rapport de réduction r_2/r_1
J_m	$kg \cdot m^2$	inertie du moteur
J_k	$kg \cdot m^2$	inertie des poulies P_k
J_0	$kg \cdot m^2$	inertie totale rapportée au moteur
$u(t)$	V	tension fournie par le régulateur

TAB. 2: Variables et paramètres de l'entraînement

$$J_0 = J_m + J_1 + \frac{J_2 + J_3 + J_4}{N^2} \quad (6)$$

Comme les accélérations longitudinale du chariot et angulaire du moteur sont reliées entre elles par l'équation suivante :

$$\dot{\omega}_m(t) = N \dot{\omega}_3(t) = \frac{N}{r_3} \ddot{x}(t) \quad (7)$$

on peut calculer la force $F(t)$ appliquée au chariot par l'intermédiaire de la tension de commande $u(t)$:

$$F(t) = -\frac{N^2 J_0}{r_3^2} \ddot{x}(t) + \frac{N K_a K_m}{r_3} u(t) \quad (8)$$

2.4 Équations linéaires de l'ensemble

Les équations linéaires (3), (4) et (8) décrivant l'ensemble du système sont réunies ci-dessous dans une écriture allégée :

$$\ddot{\varphi}(t) = +\alpha_0 \varphi(t) - \alpha_1 \dot{\varphi}(t) + \alpha_2 \ddot{x}(t) \quad (9)$$

$$\ddot{x}(t) = -\beta_1 \dot{x}(t) + \beta_2 \ddot{\varphi}(t) + \beta_3 F(t) \quad (10)$$

$$F(t) = -\gamma_1 \ddot{x}(t) + \gamma_2 u(t) \quad (11)$$

avec :

$$\alpha_0 = \frac{3g}{2L_b} \quad \alpha_1 = \frac{f_b}{4J_b} \quad \alpha_2 = \frac{3}{2L_b}$$

$$\beta_1 = \frac{f_{cc}}{m_{cc} + m_b} \quad \beta_2 = \frac{m_b L_b}{2(m_{cc} + m_b)} \quad \beta_3 = \frac{1}{m_{cc} + m_b}$$

$$\gamma_1 = \frac{N^2 J_0}{r_3^2} \quad \gamma_2 = \frac{N K_a K_m}{r_3}$$

La résolution de ce système différentiel permet d'écrire les accélérations $\ddot{\varphi}(t)$ et $\ddot{x}(t)$ par rapport aux autres variables. On obtient ainsi la forme canonique du système différentiel :

$$\ddot{\varphi}(t) = a_{21} \varphi(t) + a_{22} \dot{\varphi}(t) + a_{24} \dot{x}(t) + b_2 u(t) \quad (12)$$

$$\ddot{x}(t) = a_{41} \varphi(t) + a_{42} \dot{\varphi}(t) + a_{44} \dot{x}(t) + b_4 u(t) \quad (13)$$

avec

$$a_{21} = \frac{\alpha_0(1+\beta_3\gamma_1)}{1-\alpha_2\beta_2+\beta_3\gamma_1} \quad a_{22} = \frac{-\alpha_1(1+\beta_3\gamma_1)}{1-\alpha_2\beta_2+\beta_3\gamma_1} \quad a_{24} = \frac{-\alpha_2\beta_1}{1-\alpha_2\beta_2+\beta_3\gamma_1}$$

$$a_{41} = \frac{\alpha_0\beta_2}{1-\alpha_2\beta_2+\beta_3\gamma_1} \quad a_{42} = \frac{-\alpha_1\beta_2}{1-\alpha_2\beta_2+\beta_3\gamma_1} \quad a_{44} = \frac{-\beta_1}{1-\alpha_2\beta_2+\beta_3\gamma_1}$$

$$b_2 = \frac{\alpha_2\beta_3\gamma_2}{1-\alpha_2\beta_2+\beta_3\gamma_1} \quad b_4 = \frac{\beta_3\gamma_2}{1-\alpha_2\beta_2+\beta_3\gamma_1}$$

3 Représentation d'état de l'ensemble

Le système considéré ici peut être décrit par quatre variables d'état qui sont les positions et vitesses du balancier et celles du chariot. Définissant le vecteur d'état et sa dérivée :

$$X(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \\ x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} \quad \dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}(t) \\ \ddot{\varphi}(t) \\ \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{pmatrix} \quad (14)$$

on obtient la description d'état suivante :

$$\dot{X}(t) = \mathbf{A} \cdot X(t) + \mathbf{B} \cdot u(t) \quad (15)$$

avec :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & a_{44} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ b_4 \end{pmatrix} \quad (16)$$

et les coefficients a_{jk} et b_j tels qu'ils ont été définis dans la section 2.4.

3.1 Valeurs numériques des paramètres

Les paramètres du pendule inversé de l'eivd ont été mesurés, calculés ou déterminés expérimentalement. Leurs valeurs sont données dans le tableau 3. Prenant en compte ces valeurs, l'ensemble du système entraînement-chariot-balancier est alors décrit par la représentation d'état suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi}(t) \\ \ddot{\varphi}(t) \\ \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 40.4 & -0.217 & 0 & -1.54 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.959 & -0.005 & 0 & -0.411 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \\ x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 50.0 \\ 0 \\ 13.3 \end{pmatrix} u(t) \quad (17)$$

4 Régulateur d'état

Le régulateur d'état est un régulateur linéaire fournissant un signal de commande $u(t)$ proportionnel à chacune des 4 variables d'état décrivant le système :

$$u(t) = -K \cdot X = - \begin{pmatrix} K_\varphi & K_{\dot{\varphi}} & K_x & K_{\dot{x}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \\ x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} \quad (18)$$

Le vecteur-ligne K contient les gains associés à chaque variable d'état. D'un point de vue classique, on constate que ce régulateur d'état est en fait un double régulateur proportionnel-dérivé utilisé pour régler l'inclinaison du pendule avec $\varphi(t)$ et $\dot{\varphi}(t)$ et régler la position du chariot à l'aide de $x(t)$ et $\dot{x}(t)$.

Balancier	Chariot-Courroie	Poulies	Entraînement
$m_b = 0.095 [kg]$	$m_{ch} = 0.195 [kg]$	$r_1 = 0.008 [m]$	$K_a = 1 \left[\frac{A}{V} \right]$
$L_b = 0.40 [m]$	$m_{cr} = 0.045 [kg]$	$r_2 = 0.040 [m]$	$K_m = 0.0525 \left[\frac{Nm}{A} \right]$
$J_b = 1.30 \cdot 10^{-3} [kg m^2]$	$m_{cc} = 0.240 [kg]$	$r_3 = 0.027 [m]$	$N = 5$
$f_b = 10^{-3} \left[\frac{Nm}{rad/sec} \right]$	$f_{cc} = 0.3 \left[\frac{N}{m/sec} \right]$	$r_4 = 0.027 [m]$	$J_0 = 1.36 \cdot 10^{-5} [kg m^2]$

TAB. 3: Valeurs numériques pour le pendule de l'eivd

4.1 Critères d'optimisation pour le régulateur

La synthèse du régulateur se fait en minimisant les écarts quadratiques de l'angle et de la position longitudinale ainsi que l'énergie mise en jeu pour déplacer l'ensemble chariot-balancier. Ceci nous conduit à définir des coefficients de pondération pour chacune des positions et vitesses et pour le signal de commande.

La fonction à minimiser est alors la suivante :

$$J(Q, R) = \int_0^{\infty} \left(X^t(t) Q X(t) + R \cdot u^2(t) \right) dt \quad (19)$$

avec

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{\varphi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{\dot{\varphi}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{\dot{x}} \end{pmatrix} \quad (20)$$

Pour fixer les coefficients de pondération, on a adopté les critères suivants :

1. l'amplitude du débattement angulaire n'est pas très importante,
2. le déplacement du chariot sur le rail doit être limité,
3. on ne se préoccupe pas de limiter les vitesses atteintes,
4. le signal de commande $u(t)$ ne doit pas être trop grand.

Fort de ces considérations, on a choisi les pondérations suivantes :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R = 1 \quad (21)$$

4.2 Gains du régulateur

L'utilisation de l'algorithme LQR (Linear-Quadratic-Regulator) pour la recherche des gains optimums est d'une grande efficacité. Une fois les coefficients de pondération Q et R fixés, on obtient les gains du régulateur d'état :

$$\begin{aligned} K_\varphi &= -4.98 \text{ [V/rad]} \\ K_{\dot{\varphi}} &= -0.78 \text{ [V/(rad/sec)]} \\ K_x &= +2.24 \text{ [V/m]} \\ K_{\dot{x}} &= +1.41 \text{ [V/(m/sec)]} \end{aligned}$$

On remarque immédiatement les signes différents appliqués aux variables angulaires et longitudinales. On voit ainsi que le régulateur d'état obtenu introduit une réaction négative sur $\varphi(t)$ et $\dot{\varphi}(t)$ et une réaction positive sur $x(t)$ et $\dot{x}(t)$.

Il est intéressant de relever que c'est la boucle d'asservissement angulaire qui stabilise le système alors que la boucle d'asservissement du chariot seul est instable.

4.3 Comportement temporel en boucle fermée

L'analyse du système asservi se fait en introduisant le signal de commande (équ. 18) dans la description d'état (équ. 15). On obtient alors :

$$\dot{X}(t) = \mathbf{A} \cdot X(t) + \mathbf{B} \cdot u(t) = \mathbf{A} \cdot X(t) - \mathbf{B} \cdot \mathbf{K} \cdot X(t)$$

L'état du système bouclé est donc décrit par

$$\dot{X}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{K}) \cdot X(t) \quad (22)$$

On y trouve une nouvelle matrice d'état

$$\mathbf{A}_{\text{bf}} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{K} \quad (23)$$

qui décrit le système bouclé. Tenant compte des valeurs numériques, cette matrice vaut

$$\mathbf{A}_{\text{bf}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -220 & -39.7 & 112 & 70.9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -68.5 & -10.4 & 29.8 & 18.9 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice \mathbf{A}_{bf} représentent les pôles du système asservi qui valent :

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= -6.99 \pm j3.71 \\ p_{3,4} &= -3.41 \pm j2.43 \end{aligned}$$

On sait qu'à chaque paire de pôles complexes conjugués sont associés une constante de temps τ , une pulsation d'oscillation ω_p et un coefficient d'amortissement ζ définis comme suit :

$$p_{k,l} = -\frac{1}{\tau} \pm j\omega_p, \quad \zeta = \left| \frac{\text{Re}(p_{k,l})}{p_{k,l}} \right| \quad (24)$$

Dans notre cas, cela conduit à des coefficients d'amortissement de 0.88 et 0.81 et des constantes de temps valant 0.14 et 0.29 secondes. On peut donc s'attendre à un régime transitoire d'environ 1.5 seconde.

4.4 Régulateurs Proportionnel-Dérivé

Comme on l'a dit plus haut, les gains du régulateur d'état correspondent à des régulateurs de type proportionnel-dérivé pour les positions angulaire et longitudinale. Le signal de commande $u(t)$ peut donc être considéré comme la somme de 2 termes correspondant chacun aux boucles d'asservissement angulaire et longitudinale :

$$u(t) = u_\varphi(t) + u_x(t) \quad (25)$$

avec

$$u_\varphi(t) = K_\varphi (\varphi(t) - w_\varphi(t)) + K_{\dot{\varphi}} \dot{\varphi}(t) \quad (26)$$

$$u_x(t) = K_x (x(t) - w_x(t)) + K_{\dot{x}} \dot{x}(t) \quad (27)$$

où $w_\varphi(t)$ et $w_x(t)$ sont les consignes de positions angulaire et longitudinale.

Du point de vue de la structure des régulateurs P-D classiques, ces deux équations s'écrivent :

$$u_\varphi(t) = K_{p\varphi} \left(e_\varphi(t) + T_{d\varphi} \frac{de_\varphi(t)}{dt} \right) \quad (28)$$

$$u_x(t) = K_{px} \left(e_x(t) + T_{dx} \frac{de_x(t)}{dt} \right) \quad (29)$$

avec

$$e_\varphi(t) = w_\varphi(t) - \varphi(t) \quad e_x(t) = w_x(t) - x(t) \quad (30)$$

On voit ainsi que les gains du régulateur d'état et les paramètres des régulateurs P-D sont reliés entre eux :

$$K_{p\varphi} = -K_\varphi \quad T_{d\varphi} = \frac{K_{\dot{\varphi}}}{K_\varphi} \quad (31)$$

$$K_{px} = -K_x \quad T_{dx} = \frac{K_{\dot{x}}}{K_x} \quad (32)$$

Tenant compte des valeurs numériques, on a finalement :

$$K_{p\varphi} = +4.98 [V/rad] \quad T_{d\varphi} = 0.156 [sec]$$

$$K_{px} = -2.24 [V/m] \quad T_{dx} = 0.631 [sec]$$

4.5 Schéma fonctionnel

Le schéma fonctionnel correspondant à la description que nous venons de voir est donné à la figure 5.

5 Simulation et résultats expérimentaux

Un pendule inversé correspondant à la description présentée plus haut a été réalisé à l'Institut d'Automatisation Industrielle de l'École d'Ingénieurs du Canton de Vaud. Les essais effectués ont conduit aux résultats présentés dans la figure 6.

Les légères différences entre les résultats théoriques et expérimentaux sont vraisemblablement dues à l'effet des frottements secs qui n'ont pas été pris en compte dans la modélisation.

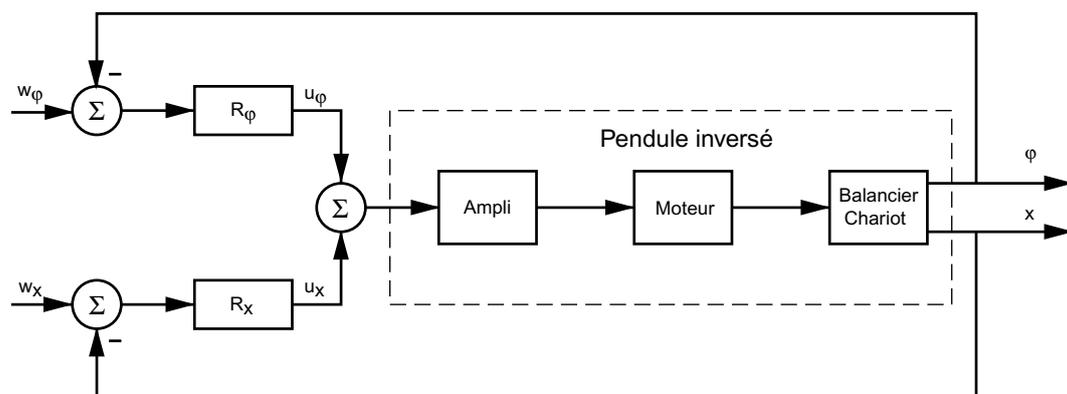


FIG. 5: Schéma fonctionnel pour la régulation classique

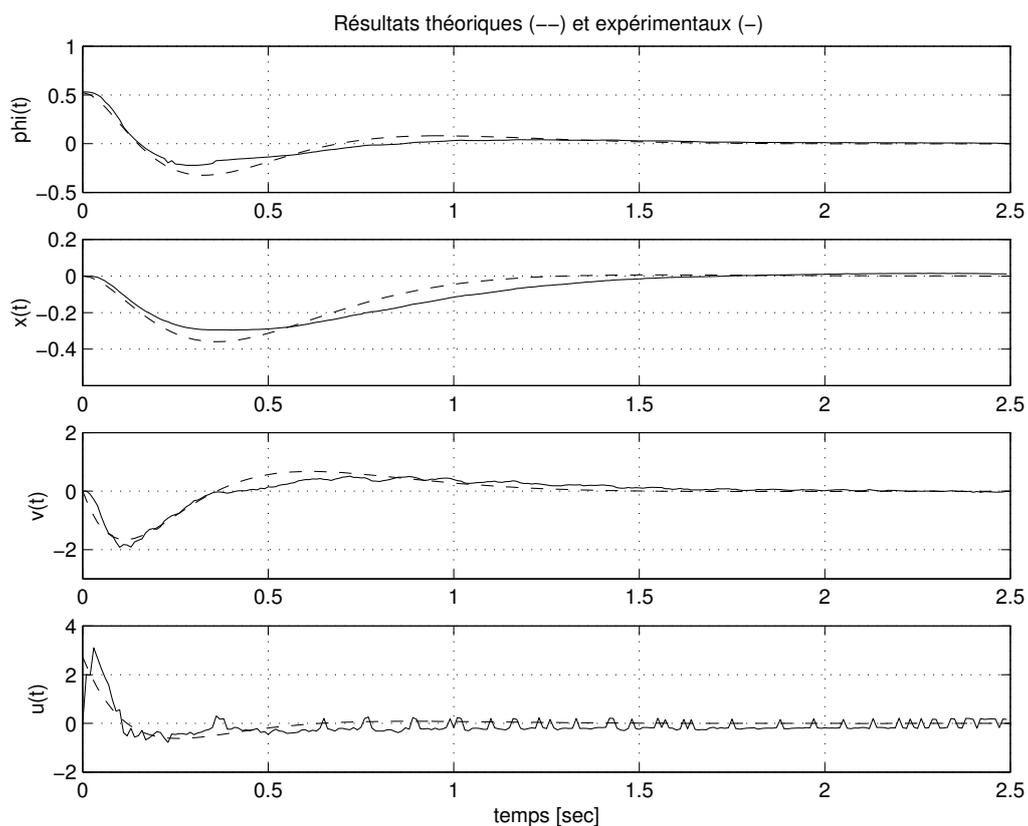


FIG. 6: Résultats de simulation et expérimentaux

6 Remerciements

Ce projet a été réalisé à la demande de M. Christian Kunze, directeur de l'eivd que je remercie tout particulièrement.

M. Yann Stragiotti, étudiant sous la supervision du professeur Pierre Dumusc, a consacré une partie de son projet de semestre à la conception mécanique du pendule inversé.

La construction mécanique a été menée à bien par MM. Roland David, mécanicien, et Robert Bovat, chef technique.

Enfin M. Steve Bezençon, ingénieur HES, s'est occupé de la conception et réalisation de l'interface électronique avec le PC ainsi que de toute la programmation temps réel sous Windows NT.

7 Annexes

7.1 Équations du pendule inversé

Pour décrire le pendule inversé, il faut décomposer le corps en 2 parties (I) et (II) pour lesquelles on écrira les équations de la dynamique d'un corps solide. Cette décomposition est illustrée par la figure 7.

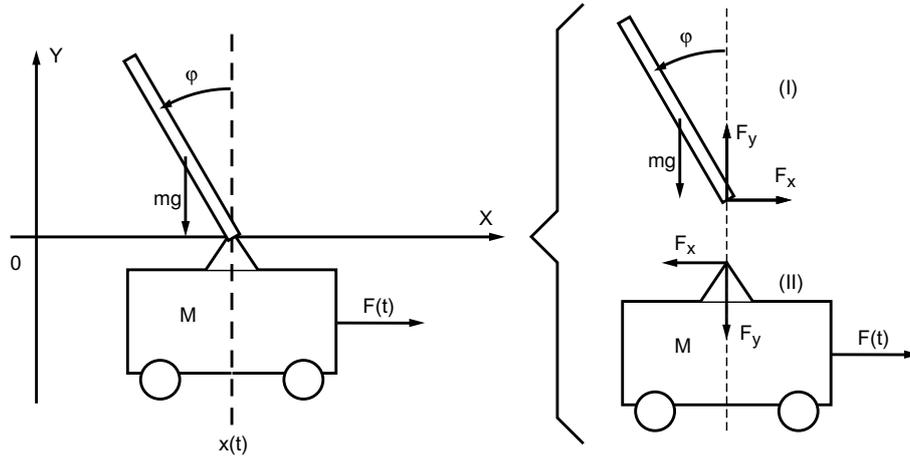


FIG. 7: Analyse mécanique du pendule inversé

Afin d'alléger l'écriture, on utilisera les variables suivantes : m pour la masse du balancier, M pour la masse du chariot, $L = L_b/2$ pour la demi-longueur du balancier.

7.1.1 Équations du balancier

Comme le balancier tourne autour d'un axe qui n'est pas fixe, il faut décrire son mouvement par rapport à son centre de gravité G :

$$m \ddot{x}_G = F_x \quad (33)$$

$$m \ddot{y}_G = F_y - mg \quad (34)$$

$$J_b \ddot{\varphi}(t) = +L \cos(\varphi) F_x + L \sin(\varphi) F_y \quad (35)$$

avec

$$J_b = m \frac{L_b^2}{12} = m \frac{L^2}{3}$$

7.1.2 Équation du chariot

Le déplacement du chariot étant limité à l'axe horizontal, on a simplement :

$$M \ddot{x} = F(t) - F_x \quad (36)$$

7.1.3 Équations de liaisons

Les coordonnées du centre de gravité du balancier sont :

$$x_G = x - L \sin(\varphi), \quad y_G = L \cos(\varphi)$$

d'où :

$$\dot{x}_G = \dot{x} - L \dot{\varphi} \cos(\varphi), \quad \dot{y}_G = -L \dot{\varphi} \sin(\varphi)$$

$$\ddot{x}_G = \ddot{x} - L \ddot{\varphi} \cos(\varphi) + L \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi) \quad (37)$$

$$\ddot{y}_G = -L \ddot{\varphi} \sin(\varphi) - L \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi) \quad (38)$$

7.1.4 Calcul des accélérations

On a ainsi un ensemble de 6 équations à 6 inconnues qui sont F_x , F_y , $\ddot{\varphi}$, \ddot{x} , \ddot{y}_G , \ddot{x}_G . Portant l'équation (37) dans (33), il vient :

$$F_x = m \ddot{x} - m L \ddot{\varphi} \cos \varphi + m L \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \quad (39)$$

Portant l'équation (38) dans (34), il vient :

$$F_y = mg - m L \ddot{\varphi} \sin \varphi - m L \dot{\varphi}^2 \cos \varphi \quad (40)$$

Remplaçant F_x et F_y dans l'équation (35), on a :

$$J_b \ddot{\varphi} = +L \cos \varphi (m \ddot{x} - m L \ddot{\varphi} \cos \varphi + m L \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) + L \sin \varphi (mg - m L \ddot{\varphi} \sin \varphi - m L \dot{\varphi}^2 \cos \varphi)$$

Regroupant les termes similaires, il vient :

$$\ddot{\varphi} (J_b + mL^2 \cos^2 \varphi + mL^2 \sin^2 \varphi) = +mL (\ddot{x} \cos \varphi + g \sin \varphi) + mL^2 \dot{\varphi}^2 (\sin \varphi \cos \varphi - \sin \varphi \cos \varphi)$$

$$\ddot{\varphi} \left(\frac{mL^2}{3} + mL^2 \right) = +mL (\ddot{x} \cos \varphi + g \sin \varphi)$$

$$\ddot{\varphi} = +\frac{3}{4L} (\ddot{x} \cos \varphi + g \sin \varphi)$$

d'où :

$$\ddot{\varphi}(t) = +\frac{3g}{2L_b} \sin \varphi(t) + \frac{3}{2L_b} \ddot{x}(t) \cos \varphi(t) \quad (41)$$

Enfin, portant l'équation (39) dans (36), il vient :

$$M \ddot{x} = F(t) - m \ddot{x} + m L \ddot{\varphi} \cos \varphi - m L \dot{\varphi}^2 \sin \varphi$$

$$(M + m) \ddot{x} = F(t) + m L \ddot{\varphi} \cos \varphi - m L \dot{\varphi}^2 \sin \varphi$$

d'où :

$$\ddot{x}(t) = \frac{F(t)}{M + m} + \frac{mL_b/2}{M + m} (\ddot{\varphi}(t) \cos \varphi(t) - \dot{\varphi}(t)^2 \sin \varphi(t)) \quad (42)$$

On notera que dans ce calcul, les frottements n'ont pas été pris en compte.

7.2 Programme de simulation et synthèse du régulateur d'état

```

% Pendule inversé: analyse et synthèse
% fmy / février 1999
    echo off; clear all; close all;
    format compact; format short;

% Constantes
    g      = 9.81;
    alu    = 2700.0;           % masse specifique [kg/m^3]
    acier  = 7700.0;         % masse specifique [kg/m^3]

% Parametres pour le pendule inverse :
% chariot et courroie
    mch    = 0.195           % masse du chariot [kg]
    mcr    = 0.045           % masse de la courroie [kg]
    frtc   = 0.3             % frottement longitudinal [N / ms^-1]

% balancier et courroie
    Lb     = 0.4 , rayon = 5e-3   % balancier [m]
    mb     = 0.095               % masse du balancier [kg]
    Jb     = mb * Lb^2 / 12       % inertie du balancier p.r. au cdg
    frtb   = 0.001               % frottement angulaire [Nm / rads^-1]
    mtot   = mb + mch + mcr      % masse totale

% Poulies d'entrainement
    epais  = 10e-3; r1 = 10e-3;   % 1ere poulie
    Jp1    = alu*epais*pi/2*r1^4;  % Jpoulie = rho*(e*pi*R^2)*R^2/2
    epais  = 10e-3; r2 = 40e-3;   % 2eme poulie}
    Jp2    = alu*epais*pi/2*r2^4;
    epais  = 10e-3; r3 = 27e-3;   % 3eme poulie
    Jp3    = alu*epais*pi/2*r3^4;
    Jp4    = Jp3;                 % 4eme poulie

% Parametres de l'entrainement
    Nred   = 5                   % rapport de reduction
    Jmot   = 70e-3*1e-4          % inertie du moteur [kg*m^2]
    Kmote  = 0.0525              % cte de couple [Nm / A]
    Kamp   = 1.0                 % gain de l'ampli. [A / V]
    Jtot   = Jmot+Jp1+(Jp2+Jp3+Jp4)/Nred^2

% capteurs
    Kphi   = 20/60*360/2/pi;     % capteur angulaire 20V/60deg
    Kx     = 20/1.5;             % capteur longitudinal 20V / 1.5m

% Variables intermediaires
    a0     = 3*g / (2*Lb);        a1 = frtb / 4/Jb;           a2 = 3 / (2*Lb);
    b1     = frtc / mtot;         b2 = mb*Lb / (2*mtot);   b3 = 1 / mtot;
    c1     = Jtot * (Nred/r3)^2;  c2 = Nred*Kamp*Kmot / r3;

% Matrice d'etat
    den    = 1 - a2*b2 + b3*c1;
    a21   = a0*(1+b3*c1)/den;    a22 = -a1*(1+b3*c1)/den;  a24 = -a2*b1/den;
    a41   = a0*b2/den;          a42 = -a1*b2/den;        a44 = -b1/den;
    b20   = a2*b3*c2/den;       b40 = b3*c2/den;

% Description du pendule inverse :
% Vecteur d'etat      : Xs = [phi phid x xd]'; => Xs(4,1)
% vecteur des sorties : y = [phi x]';
% vecteur des consignes: Xr = [1 0 1 0]';
% Xsd = A Xs + B u      avec A(4,4), B(4,1), u(1,1)

```

```

%      y      = C Xs + D u      y(2,1), C(2,4), D(2,1)
%      u      = - Kreg Xs + N Xr Kreg(1,4), N(1,4), Xr(4,1)

A = [0  1  0  0
     a21 a22 0 a24
     0  0  0  1
     a41 a42 0 a44]           % matrice d'etat
B = [0  b20 0  b40]';       % matrice de commande
C = [1 0 0 0
     0 0 1 0];             % matrice de sortie
D = [0 0]';
Xr = [1 0 1 0]';           % vecteur de consigne

% Poles en boucle ouverte:
pk = eig (A);

% Calcul du regulateur d'etat Kreg
% tel que: J = S [Xs'QXs + u'Ru]dt => minimum :
Qphi = 1; Qx = 5; R = 1;
Q = [Qphi 0 0 0
     0 0 0 0
     0 0 Qx 0
     0 0 0 0];
Kreg = lqr(A, B, Q, R)

% Regulateurs PD
Kpa = -Kreg(1); Tda = Kreg(2) / Kreg(1);
Kpx = -Kreg(3); Tdx = Kreg(4) / Kreg(3);
RegA = Kpa * tf([Tda 1], [0.1*Tda 1]);
RegX = Kpx * tf([Tdx 1], [0.1*Tdx 1]);

% Modele d'etat en boucle fermee :
N = Kreg;
Af = A - B * Kreg;
Bf = B * N;
Cf = C - D * Kreg;
Df = D * N;
pkf = eig(Af)               % Poles en boucle fermee
sysbf = ss (Af,Bf,Cf,Df);
% Reponse statique:
Xstat = - inv(Af) * Bf * Xr;

% Informations:
Qphi, Qx, R                 % parametres pour la synthese LQR
Kpa, Tda                    % parametres du regulateur angulaire
Kpx, Tdx                    % parametres du regulateur longitudinal
Ttrans = -5 ./ real(pkf)'   % duree du regime transitoire
Tper = 2*pi ./ abs(imag(pkf))' % periodes d'oscillations
damp (sysbf)                % amortissement et pulsations propres

% Calcul et tracage de la reponse temporelle
tmax = 5; dt = tmax / 250;
t = 0:dt:tmax; Xs0 = [pi/6 0 0 0];
[yf, xf] = initial (Af, Bf, Cf, Df, Xs0, t);
ut = Kreg * xf';            % signal de commande
a4 = [a41 a42 0 a44];      % vecteur pour l'acceleration xdd
xdd = a4 * xf' + b40 * ut; % acceleration longitudinale
phi = xf(:,1); phid = xf(:,2); % extraction des variables d'etat
xt = xf(:,3); xd = xf(:,4);
figure (1);
subplot (4,1,1); plot (t, phi); ylabel('phi(t) [rad]'); grid

```

```
texte = [' Qa = ', num2str(Qphi,2)];
texte = [texte,' Qx = ', num2str(Qx,2),' R = ', num2str(R,2)];
title (['Evolution du pendule inversé', texte]);
axis ([0 5 -0.5 1]);
text (4.3, 0.7, ['Kpa = ' num2str(Kpa, 3)]);
text (4.3, 0.2, ['Tda = ' num2str(Tda, 3)]);
subplot (4,1,2); plot (t, xt ); ylabel('x(t) [m]'); grid
axis ([0 5 -0.6 0.2]);
text (4.3,-0.1, ['Kpx = ' num2str(Kpx, 3)]);
text (4.3,-0.3, ['Tdx = ' num2str(Tdx, 3)]);
subplot (4,1,3); plot (t, xd); ylabel('v(t) [m/sec]'); grid
axis ([0 5 -3 2]);
subplot (4,1,4); plot (t, ut ); ylabel('u(t) [V]');
axis ([0 5 -2 5]);
xlabel ('temps [sec]'); grid
```

7.3 Forme canonique des équations non linéaires

Afin de pouvoir simuler le comportement du pendule dans tout son domaine de fonctionnement, il est nécessaire d'écrire les équations différentielles non linéaires sous la forme canonique représentée par un ensemble d'équations différentielles d'ordre 1. Celles-ci pourront alors être résolues par intégration numérique.

Nous avons vu que l'ensemble moteur-chariot-balancier est décrit par les 3 équations non linéaires suivantes :

$$\ddot{\varphi}(t) = \frac{3g}{2L_b} \sin(\varphi(t)) - \frac{f_b}{4J_b} \dot{\varphi}(t) + \frac{3}{2L_b} \ddot{x}(t) \cos(\varphi(t))$$

$$\ddot{x}(t) = -\frac{f_{cc}}{m_{cc} + m_b} \dot{x}(t) + \frac{m_b L_b / 2}{m_{cc} + m_b} \left(\ddot{\varphi}(t) \cos(\varphi(t)) - \dot{\varphi}^2(t) \sin(\varphi(t)) \right) + \frac{1}{m_{cc} + m_b} F(t)$$

$$F(t) = -\frac{N^2 J_0}{r_3^2} \ddot{x}(t) + \frac{N K_a K_m}{r_3} u(t)$$

Définissant les nouvelles variables :

$$\begin{aligned} m_t &= m_b + m_{cc} & L_m &= \frac{L_b}{2} \frac{m_b}{m_t} \\ a_1(t) &= \frac{3g}{2L_b} \sin \varphi(t) & a_2(t) &= \frac{3}{2L_b} \cos \varphi(t) & a_3(t) &= \frac{f_b}{4J_b} \dot{\varphi}(t) \\ b_1(t) &= \frac{f_{cc}}{m_t} \dot{x}(t) & b_2(t) &= L_m \cos \varphi(t) & b_3(t) &= L_m \dot{\varphi}^2(t) \sin \varphi(t) & b_4 &= \frac{1}{m_t} \\ c_1 &= \frac{N^2 J_0}{r_3} & c_2(t) &= \frac{N K_a K_m}{r_3} u(t) \end{aligned}$$

on peut écrire les équations non linéaires sous une forme allégée :

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}(t) &= a_1(t) - a_2(t) + a_3(t) \ddot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) &= -b_1(t) + b_2(t) \ddot{\varphi}(t) - b_3(t) + b_4 F(t) \\ F(t) &= -c_1 \ddot{x}(t) + c_2 - b_3(t) \end{aligned}$$

La résolution de ces 3 équations par rapport aux 3 inconnues $\ddot{\varphi}(t)$, $\ddot{x}(t)$, $F(t)$ donne :

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}(t) &= \frac{1}{D(t)} (a_1(t) - a_2(t) - a_3(t) \cdot (b_1(t) + b_3(t)) + b_4 c_1(t) \cdot (a_1(t) - a_2(t)) - a_3(t) b_4 c_2(t)) \\ \ddot{x}(t) &= \frac{-1}{D(t)} (b_1(t) + b_3(t) + b_2(t) \cdot (-a_1(t) + a_2(t)) - b_4 c_2(t)) \\ F(t) &= \frac{1}{D(t)} (c_1 \cdot (b_1(t) + b_3(t) + b_2(t) \cdot (-a_1(t) + a_2(t))) + c_2(t) \cdot (1 - a_3(t) b_2(t))) \end{aligned}$$

avec :

$$D(t) = 1 - a_3(t) b_2(t) + b_4 c_1$$